OPPGAVEHEFTE · STATISTIKK

6 Stokastiske variabler og binomisk fordeling

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer en oppsummering av hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst. Bruk tabellen over binomisk fordeling i bilag A der det trengs.

Formelark

STOKASTISKE VARIABLER

Sannsynlighetsfordeling $P(X = x)$ for hver verdi. Summen er 1.

Forventningsverdi

$$E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$$

Varians

$$Var(X) = \sum (x - \mu)^2 \cdot P(X = x)$$

Standardavvik

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Modell og data $\bar{x} \to \mu$, $s \to \sigma$ og $\hat{p} \to p$ når n øker.

- $E(X)$ er gjennomsnittet i det lange løp, ikke nødvendigvis en mulig verdi.
- Standardavviket måler usikkerhet og risiko.

BINOMISK FORDELING

Forutsetninger n bestemt, to utfall, samme p, uavhengige delforsøk.

Binomisk sannsynlighet

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Minst k

$$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k - 1)$$

Forventning

$$E(X) = np$$

Standardavvik

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Vanlige verdier

$$\mu \pm 2\sigma$$

- Tabellen i bilag A gir $P(X \leqslant k)$.
- Når $p > 0{,}5$, tell fiaskoene: $n - X \sim B(n, 1-p)$.

6.1.1 Stokastiske variabler

EKSEMPEL *Husholdninger*

X er antall personer i en tilfeldig valgt husholdning. Bruk tabellen fra SSB. Finn

a) $P(X \leqslant 2)$,

b) $P(X > 2)$,

c) $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$.

Løsning

a) $P(X \leqslant 2) = 0{,}413 + 0{,}308 = 0{,}721$

b) $P(X > 2) = 1 - 0{,}721 = 0{,}279$

c) $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$ er $0{,}308 + 0{,}118 + 0{,}111 = 0{,}537$. ■

6.1 X kan få verdiene 0, 1, 2 og 3 med sannsynlighetene 0,1, 0,3, 0,4 og p. Finn p.

6.2 Bruk fordelingen i oppgaven over. Finn

a) $P(X \leqslant 1)$,

b) $P(X > 1)$,

c) $P(X < 1)$.

6.3 Du kaster to mynter. X er antall kron. Lag sannsynlighetsfordelingen til X.

6.4 Du kaster to terninger. X er det største av de to tallene. Finn $P(X = 1)$ og $P(X = 6)$.

6.5 X er antall personer i en tilfeldig husholdning, og $P(X = 1) = 0{,}413$. Finn $P(X \geqslant 2)$.

6.6 Kan 0,2, 0,3 og 0,6 være en sannsynlighetsfordeling? Begrunn.

6.7 Forklar forskjellen på $P(X < 3)$ og $P(X \leqslant 3)$ for en variabel som bare kan få hele tall.

6.8 I et kortspill gir ess 4 poeng, konge 3, dame 2, knekt 1 og de andre kortene 0. Du trekker ett kort. X er antall poeng.

a) Lag sannsynlighetsfordelingen til X.

b) Finn $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

6.9 Hva er forskjellen på X og x?

6.10 Hva blir utskriften?

Python

```
x = [0, 1, 2, 3]
p = [0.1, 0.3, 0.4, 0.2]
svar = 0
for i in range(4):
    if x[i] <= 1:
        svar = svar + p[i]
print(svar)
```

6.11 Gi et eksempel på en diskret og en kontinuerlig variabel.

6.12 X er antall seksere på to terningkast. Lag sannsynlighetsfordelingen.

6.1.2 Forventningsverdi

EKSEMPEL *Terningen*

Finn forventningsverdien for antall øyne på en terning.

Løsning

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Terningen kan aldri vise 3,5. Forventningsverdien er et gjennomsnitt, ikke en verdi vi venter å få i ett kast. ■

EKSEMPEL *Husholdninger*

Finn forventet antall personer i en tilfeldig husholdning. Regn «5 eller flere» som 5.

x	$P(X = x)$
1	0,413
2	0,308
3	0,118
4	0,111
5	0,050

Løsning

$$E(X) = 1 \cdot 0{,}413 + 2 \cdot 0{,}308 + 3 \cdot 0{,}118 + 4 \cdot 0{,}111 + 5 \cdot 0{,}050$$
$$= 0{,}413 + 0{,}616 + 0{,}354 + 0{,}444 + 0{,}250 = 2{,}077$$

Det bor i gjennomsnitt omtrent 2,1 personer i en husholdning. Det virkelige tallet er litt høyere, fordi noen husholdninger har flere enn 5 personer. ■

EKSEMPEL *Forsikring*

En mobilforsikring koster 600 kr i året. Forsikringsselskapet regner med at 5 % av kundene får en skade som koster 8000 kr å reparere, og 1 % får mobilen stjålet og må få en ny til 10 000 kr. Resten får ingen utbetaling.

a) Finn forventet utbetaling per kunde.

b) Hvorfor kjøper folk forsikringen, når de i gjennomsnitt betaler mer enn de får igjen?

Løsning

a) $P(X = 0) = 1 - 0{,}05 - 0{,}01 = 0{,}94$.

$E(X) = 8000 \cdot 0{,}05 + 10\,000 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}94 = 400 + 100 = 500$ kr

Selskapet tjener i gjennomsnitt $600 - 500 = 100$ kr per kunde.

b) Forventningsverdien sier hva som skjer i gjennomsnitt over mange kunder. For den enkelte kan en uventet regning på 10 000 kr være vanskelig å betale. Med forsikring betaler kunden litt mer i gjennomsnitt, men slipper risikoen for

et stort tap. Hvor stor risikoen er, måler vi med standardavviket i 6.1.3.

■

EKSEMPEL *Rettferdig spill*

Et spill er **rettferdig** når den forventede gevinsten er lik prisen. Hvor mye må lykkehjulet betale ut på feltet med 100 kr for at spillet skal være rettferdig når prisen er 20 kr?

Løsning

$g \cdot 0{,}1 + 30 \cdot 0{,}2 = 20 \quad \Rightarrow \quad 0{,}1\ g = 14 \quad \Rightarrow \quad g = 140$

Feltet må gi 140 kr.

■

6.13 X er 0, 1 eller 2 med sannsynlighetene 0,3, 0,5 og 0,2. Finn $E(X)$.

6.14 Finn forventet antall kron på to myntkast.

6.15 Finn forventet antall poeng i kortspillet i 6.1.1.

6.16 Du betaler 5 kr for å kaste en terning. Får du 6, får du 20 kr, ellers ingenting.

a) Finn forventet gevinst.

b) Finn forventet nettogevinst.

6.17 Hvor mye må spillet over betale for en sekser for å være rettferdig?

6.18 En reiseforsikring betaler ut 15 000 kr med sannsynlighet 0,02, ellers ingenting. Finn forventet utbetaling.

6.19 Et lotteri har 1000 lodd. Ett lodd vinner 2000 kr, og fem lodd vinner 200 kr. Et lodd koster 10 kr.

a) Finn forventet gevinst per lodd.

b) Hvor mye tjener arrangøren hvis alle loddene blir solgt?

6.20 Forventet antall personer i en husholdning er omtrent 2,1. Hva betyr det? Kan en husholdning ha 2,1 personer?

6.21 Stemmer det at forventningsverdien er den mest sannsynlige verdien? Gi et eksempel.

6.22 Hva blir utskriften?

Python

```
x = [0, 10, 50]
p = [0.7, 0.2, 0.1]
e = 0
for i in range(3):
    e = e + x[i] * p[i]
print(e)
```

6.23 X er 0 eller 10, og $E(X) = 4$. Finn $P(X = 10)$.

6.24 Finn forventet sum av to terninger. Bruk at forventningen for én terning er 3,5, eller regn ut fra fordelingen.

6.1.3 Varians og standardavvik

EKSEMPEL *Lykkehjulet*

Finn standardavviket til gevinsten på lykkehjulet: 100 kr med sannsynlighet 0,1, 30 kr med sannsynlighet 0,2 og 0 kr med sannsynlighet 0,7. Forventningsverdien er 16 kr. Sammenlikn med myntspillet.

Løsning

x	P	$(x-\mu)^2$	Ganget med P
100	0,1	$84^2 = 7056$	705,6
30	0,2	$14^2 = 196$	39,2
0	0,7	$(-16)^2 = 256$	179,2

$\mathrm{Var}(X) = 705{,}6 + 39{,}2 + 179{,}2 = 924$ og $\sigma = \sqrt{924} \approx 30{,}4$ kr.

Standardavviket er fem ganger så stort som for myntspillet (6 kr). Spillene har samme forventningsverdi, men lykkehjulet er mye mer usikkert.

■

EKSEMPEL *Terningen og myntene*

a) Finn standardavviket for antall øyne på en terning. ($\mu = 3{,}5$.)

b) Finn standardavviket for antall kron på tre myntkast. ($\mu = 1{,}5$, fordelingen står i 6.1.1.)

Løsning

a) $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{2 \cdot (0{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25)}{6} = \dfrac{17{,}5}{6} \approx 2{,}917$

$\sigma = \sqrt{2{,}917} \approx 1{,}71.$

b) $\mathrm{Var}(X) = 2{,}25 \cdot \dfrac{1}{8} + 0{,}25 \cdot \dfrac{3}{8} + 0{,}25 \cdot \dfrac{3}{8} + 2{,}25 \cdot \dfrac{1}{8} = 0{,}75$

$\sigma = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87.$

■

EKSEMPEL *Forsikringen*

I 6.1.2 var utbetalingen fra mobilforsikringen 8000 kr med sannsynlighet 0,05, 10 000 kr med sannsynlighet 0,01 og 0 kr ellers, og forventet utbetaling 500 kr. Finn standardavviket, og forklar hva det sier om hvorfor folk kjøper forsikring.

Løsning

$$\mathrm{Var}(X) = 7500^2 \cdot 0{,}05 + 9500^2 \cdot 0{,}01 + 500^2 \cdot 0{,}94$$
$$= 2\,812\,500 + 902\,500 + 235\,000 = 3\,950\,000$$

$\sigma = \sqrt{3\,950\,000} \approx 1990$ kr.

Kostnaden for den enkelte er svært usikker: Standardavviket er fire ganger så stort som forventningsverdien. Med forsikring betaler kunden 600 kr hvert år, uten usikkerhet. Kunden bytter en usikker kostnad mot en sikker. Forsikringsselskapet

har så mange kunder at gjennomsnittet per kunde blir nær 500 kr (store talls lov), så for selskapet er usikkerheten liten. ■

6.25 X er 0 eller 4, begge med sannsynlighet 0,5. Finn μ, $\mathrm{Var}(X)$ og σ.

6.26 X er 0, 1 eller 2 med sannsynlighetene 0,3, 0,5 og 0,2, og $\mu = 0{,}9$. Finn variansen og standardavviket.

6.27 Finn standardavviket for antall kron på to myntkast.

6.28 X er 1 med sannsynlighet 0,2 og 0 ellers. Finn $\mathrm{Var}(X)$ og σ.

6.29 Spill A gir 16 kr i forventet gevinst med standardavvik 6 kr. Spill B gir 16 kr med standardavvik 30 kr. Hva er forskjellen for spilleren?

6.30 X måles i kroner. Hvilken enhet har $\mathrm{Var}(X)$ og σ?

6.31 Et spill gir 50 kr med sannsynlighet 0,1, ellers ingenting. Finn μ og σ.

6.32 Når er variansen 0?

6.33 Petter regner ut $\mathrm{Var}(X) = 2{,}25$ og svarer at standardavviket er 2,25. Hva er feil?

6.34 Hva blir utskriften?

Python

```
x = [0, 4]
p = [0.5, 0.5]
mu = 2
var = 0
for i in range(2):
    var = var + (x[i] - mu)**2 * p[i]
print(var**0.5)
```

6.35 Bruk snarveien $\mathrm{Var}(X) = \sum x^2 P(X = x) - \mu^2$ til å finne variansen i kortspillet i 6.1.1.

6.36 Hvorfor kvadrerer vi avvikene før vi legger sammen?

6.1.4 Fra modell til data

EKSEMPEL *Et utvalg husholdninger*

En elev spurte 20 tilfeldig valgte husholdninger hvor mange som bodde der:

1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 2, 1, 1, 2, 5, 1, 3, 2, 4, 1, 2, 1, 2

a) Regn ut $\bar{x}$ og s.

b) Sammenlikn med modellen fra SSB, $\mu = 2{,}08$ og $\sigma = 1{,}19$.

Løsning

a) $\bar{x} = \dfrac{41}{20} = 2{,}05$. Frekvenstabellen er 1: 8, 2: 7, 3: 2, 4: 2, 5: 1. Med avvik fra 2,05:

$$\sum (x - \bar{x})^2 = 8 \cdot 1{,}05^2 + 7 \cdot 0{,}05^2 + 2 \cdot 0{,}95^2 + 2 \cdot 1{,}95^2 + 2{,}95^2 = 26{,}95$$

$$s = \sqrt{\frac{26{,}95}{19}} \approx 1{,}19.$$

b) Både gjennomsnittet og standardavviket ligger svært nær modellen. Utvalget passer godt med SSBs tall. Med bare 20 husholdninger kunne forskjellen like gjerne vært større. ■

6.37 Seks terningkast ga 2, 4, 4, 5, 1, 6. Regn ut $\bar{x}$ og sammenlikn med μ.

6.38 Hvilke symboler hører til modellen, og hvilke til data: μ, s, $\bar{x}$, σ, $\hat{p}$, p?

6.39 Hvorfor får to elever som kaster en terning 20 ganger hver, som regel ulike gjennomsnitt?

6.40 Hvilke gjennomsnitt varierer mest: gjennomsnitt av 10 kast eller av 100 kast? Begrunn.

6.41 Du kaster en mynt 1000 ganger og får 520 kron. Finn $\hat{p}$ og sammenlikn med p.

6.42 Lykkehjulet i boka har forventet gevinst 16 kr. Etter 100 spill hadde det betalt ut 1400 kr. Hva var gjennomsnittlig gevinst? Er det overraskende?

6.43 Hva blir utskriften?

Python

```
data = [2, 1, 3, 2, 2]
s = 0
for d in data:
    s = s + d
print(s / len(data))
```

6.44 Hvorfor deler vi på $n - 1$ når vi regner ut s fra data, men ikke når vi regner ut σ i en modell?

6.45 En simulering av 10 000 kast med en terning ga $\bar{x} = 3{,}49$ og $s = 1{,}71$. Stemmer det med modellen?

6.46 Når er det grunn til å mistenke at en modell ikke passer med data?

6.2.1 Binomiske forsøk

EKSEMPEL *Binomisk eller ikke?*

Er X binomisk fordelt? Finn i så fall n og p.

a) X er antall seksere på 10 terningkast.

b) X er antall gutter blant de neste 4 barna som blir født på et sykehus.

c) X er antall kast til du får den første sekseren.

d) X er antall hjerter når du trekker 5 kort fra en kortstokk uten tilbakelegging.

e) X er antall som røyker blant 1000 tilfeldig valgte unge i Norge.

Løsning

a) Ja. $X \sim B(10, \frac{1}{6})$.

b) Ja. $X \sim B(4; 0{,}514)$. Kjønnet til barna er uavhengig.

c) Nei. Antall kast er ikke bestemt på forhånd.

d) Nei. Uten tilbakelegging endrer sannsynligheten for hjerter seg fra trekk til trekk, så delforsøkene er avhengige.

e) Nesten. Utvalget trekkes uten tilbakelegging, men populasjonen er så stor (over 600 000 unge) at sannsynligheten nesten ikke endrer seg (oppgaven «Stor pose» i 5.4.2). Vi kan bruke $B(1000; 0{,}207)$ som modell. ■

EKSEMPEL *To kron på fire kast*

Du kaster en mynt fire ganger. Finn sannsynligheten for nøyaktig to kron.

Løsning

Veiene er KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK og MMKK, altså 6. Hver har sannsynligheten $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

$$P(X = 2) = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = 0{,}375$$

■

EKSEMPEL *To gutter av fire*

Finn sannsynligheten for at nøyaktig to av fire barn er gutter. Bruk $p = 0{,}514$.

Løsning

Det er 6 veier med to gutter og to jenter, og hver har sannsynligheten $0{,}514^2 \cdot 0{,}486^2$.

$$P(X = 2) = 6 \cdot 0{,}514^2 \cdot 0{,}486^2 \approx 0{,}374$$

■

6.47 Er X binomisk fordelt? Finn i så fall n og p.

a) X er antall kron på 12 myntkast.

b) X er antall kast til du får kron.

c) X er antall riktige når du gjetter på 8 spørsmål med fem alternativer.

d) X er antall jenter når du trekker 4 elever fra en klasse med 10 jenter og 10 gutter.

6.48 Skriv opp de fire forutsetningene for binomisk fordeling.

6.49 $X \sim B(3; 0{,}5)$. Finn $P(X = 2)$.

6.50 $X \sim B(3; 0{,}2)$. Finn $P(X = 0)$ og $P(X = 3)$.

6.51 Skriv opp alle veiene med to suksesser (S) og to fiaskoer (F) i fire forsøk.

6.52 Lag sannsynlighetsfordelingen for antall kron på fire myntkast.

6.53 $X \sim B(4; 0{,}1)$. Finn $P(X = 1)$.

6.54 Hva blir utskriften?

Python

```
antall = 0
for a in [0, 1]:
    for b in [0, 1]:
        for c in [0, 1]:
            if a + b + c >= 2:
                antall = antall + 1
print(antall)
```

6.55 Du trekker tre kort fra en kortstokk uten tilbakelegging og teller antall ess. Hvorfor er dette ikke binomisk? Når blir det binomisk?

6.56 Skriv raden i Pascals trekant for $n = 5$.

6.57 $X \sim B(5; 0{,}5)$. Finn $P(X = 3)$.

6.58 I en binomisk modell for antall defekte varer i en kontroll kalles en defekt vare en suksess. Er det rart?

6.2.2 Binomisk sannsynlighet

EKSEMPEL *Gjette på prøven*

Du gjetter på alle 20 spørsmålene. $X \sim B(20; 0{,}25)$. Bruk tabellen og finn

a) $P(X \leqslant 3)$,

b) $P(X = 5)$,

c) $P(X \geqslant 10)$, sannsynligheten for å stå.

Løsning

a) Tabellen gir $P(X \leqslant 3) = 0{,}2252$.

b) $P(X = 5) = P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 4)$, som er $0{,}6172 - 0{,}4148 = 0{,}2024$.

c) $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9)$, som er $1 - 0{,}9861 = 0{,}0139$.

Sjansen for å stå ved å gjette er bare omtrent 1,4 %. ■

EKSEMPEL *Når p er større enn 0,5*

Mia treffer på 80 % av straffekastene. Finn sannsynligheten for at hun treffer minst 8 av 10.

Løsning

Antall bom er $Y \sim B(10; 0{,}2)$. Minst 8 treff betyr høyst 2 bom:

$$P(X \geqslant 8) = P(Y \leqslant 2) = 0{,}6778$$

■

6.59 $X \sim B(10; 0{,}5)$. Bruk tabellen og finn

a) $P(X \leqslant 4)$,

b) $P(X = 5)$,

c) $P(X \geqslant 8)$,

d) $P(3 \leqslant X \leqslant 7)$.

6.60 $X \sim B(20; 0{,}1)$. Finn

a) $P(X = 0)$,

b) $P(X \geqslant 3)$,

c) $P(X < 2)$.

6.61 $X \sim B(15; 0{,}4)$. Finn $P(X \leqslant 6)$, $P(X > 6)$ og $P(X = 6)$.

6.62 En prøve har 12 spørsmål med fire alternativer. Du gjetter på alle. Finn sannsynligheten for

a) minst 6 riktige,

b) høyst 2 riktige.

6.63 $X \sim B(8; 0{,}65)$. Finn $P(X \geqslant 6)$.

6.64 5 % av varene fra en maskin er defekte. Du kontrollerer 20 varer. Finn sannsynligheten for

a) ingen defekte,

b) minst 2 defekte.

6.65 10 % av befolkningen har en allergi. Finn sannsynligheten for at minst én av 15 tilfeldige personer har allergien.

6.66 Lea skriver $P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 3)$. Hva er feil?

6.67 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import comb
print(comb(5, 2))
print(comb(5, 2) * 0.5**5)
```

6.68 Hva gir `binom.cdf(3, 10, 0.5)`? Bruk tabellen.

6.69 $X \sim B(5; 0{,}2)$. Bruk formelen og finn $P(X = 2)$.

6.70 Du kaster en mynt 10 ganger. Hvor mange kron må du minst få for at sannsynligheten for å få så mange eller flere skal være under 5 %?

6.2.3 Forventning og spredning i binomisk fordeling

EKSEMPEL *Gjette på prøven*

$X \sim B(20; 0{,}25)$. Finn μ og σ.

Løsning

$\mu = 20 \cdot 0{,}25 = 5$ og $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{3{,}75} \approx 1{,}94$.

∎

EKSEMPEL *Gutter i kommunene*

I Tromsø ble det født 854 barn i 2025, og 431 av dem var gutter. Er det uvanlig få gutter? Bruk $p = 0{,}514$.

Løsning

$\mu = 854 \cdot 0{,}514 \approx 439{,}0$ og $\sigma = \sqrt{854 \cdot 0{,}514 \cdot 0{,}486} \approx 14{,}6$.

Intervallet er $439{,}0 - 29{,}2 \approx 410$ til $439{,}0 + 29{,}2 \approx 468$. 431 ligger godt innenfor. Det er ikke uvanlig få gutter. Avviket er 8 gutter, omtrent et halvt standardavvik.

∎

6.71 $X \sim B(50; 0{,}2)$. Finn μ og σ.

6.72 Du kaster en mynt 400 ganger. Finn μ, σ og intervallet $\mu \pm 2\sigma$ for antall kron.

6.73 Du kaster en terning 60 ganger og får 18 seksere. Er det uvanlig?

6.74 I Drammen ble det født 1011 barn i 2025, og 522 var gutter. Er det uvanlig? Bruk $p = 0{,}514$.

6.75 En prøve har 40 spørsmål med fire alternativer. En elev får 17 riktige. Tyder det på at eleven har gjettet på alt?

6.76 For hvilken p er σ størst når n er fast? Forklar.

6.77 $X \sim B(n, p)$ har varians 9. Hva er standardavviket?

6.78 Hva skjer med μ og σ når n blir fire ganger så stor?

6.79 Hva blir utskriften?

Python

```
n = 400
p = 0.5
sigma = (n * p * (1 - p))**0.5
print(n * p, sigma)
```

6.80 20,7 % av unge mellom 16 og 24 år røyker daglig eller av og til. I en undersøkelse spør vi 1000 tilfeldige unge. Finn μ og σ for antall røykere.

6.81 Undersøkelsen over finner 250 røykere. Er det uvanlig? Hva kan forklaringen være?

6.82 Et resultat ligger utenfor $\mu \pm 2\sigma$. Betyr det at modellen er feil?

Fasit

6.1.1 Stokastiske variabler

6.1
$p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

6.2
a) 0,4 b) 0,6 c) 0,1

6.3
$P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$

6.4
$P(X = 1) = \frac{1}{36}$: bare $(1, 1)$. $P(X = 6) = \frac{11}{36}$: alle utfall med minst én sekser.

6.5
$1 - 0{,}413 = 0{,}587$

6.6
Nei, summen er 1,1.

6.7
$P(X \leqslant 3)$ tar med $X = 3$, men det gjør ikke $P(X < 3)$. For hele tall er $P(X < 3) = P(X \leqslant 2)$.

6.8
a) $P(X = 0) = \frac{36}{52}$, og $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = \frac{4}{52}$.
b) $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

6.9
X er den stokastiske variabelen, et tall som avhenger av utfallet. x er en bestemt verdi variabelen kan få.

6.10
0.4

6.11
Diskret: antall søsken. Kontinuerlig: høyde. (Mange svar er riktige.)

6.12
$P(X = 0) = \frac{25}{36}$, $P(X = 1) = \frac{10}{36}$, $P(X = 2) = \frac{1}{36}$

6.1.2 Forventningsverdi

6.13
$0 + 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$

6.14
$0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$

6.15
$\frac{(4 + 3 + 2 + 1) \cdot 4}{52} = \frac{40}{52} \approx 0{,}77$

6.16
a) $\frac{20}{6} \approx 3{,}33$ kr b) $3{,}33 - 5 \approx -1{,}67$ kr

6.17
$g \cdot \frac{1}{6} = 5$, så $g = 30$ kr.

6.18
$15\,000 \cdot 0{,}02 = 300$ kr

6.19
a) $\frac{2000 + 5 \cdot 200}{1000} = 3$ kr
b) $10\,000 - 3000 = 7000$ kr

6.20
Det er gjennomsnittet over svært mange husholdninger. Ingen husholdning har 2,1 personer.
Forventningsverdien trenger ikke være en mulig verdi.

6.21
Nei. På lykkehjulet er 0 kr mest sannsynlig, men forventningsverdien er 16 kr.

6.22
7.0. $0 + 2 + 5 = 7$

6.23
$10 \cdot P(X = 10) = 4$, så $P(X = 10) = 0{,}4$.

6.24
7. Fordelingen er symmetrisk om 7.

6.1.3 Varians og standardavvik

6.25
$\mu = 2$, $Var(X) = 4 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}5 = 4$, $\sigma = 2$

6.26
$0{,}81 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 1{,}21 \cdot 0{,}2 = 0{,}243 + 0{,}005 + 0{,}242 = 0{,}49$, $\sigma = 0{,}7$

6.27
$\mu = 1$. $Var = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}5$, $\sigma = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$

6.28
$\mu = 0{,}2$. $Var = 0{,}64 \cdot 0{,}2 + 0{,}04 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$, $\sigma = 0{,}4$

6.29
Gjennomsnittet er det samme, men B er mye mer usikkert: Gevinsten varierer mye mer fra spill til spill.

6.30
$Var(X)$ har enheten kr^2, og σ har enheten kr.

6.31
$\mu = 5$. $Var = 45^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}9 = 202{,}5 + 22{,}5 = 225$, $\sigma = 15$ kr

6.32
Når X alltid får samme verdi. Da er alle avvikene 0.

6.33
Han har glemt kvadratroten. $\sigma = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

6.34
2.0

6.35
$\sum x^2 P = \frac{(16 + 9 + 4 + 1) \cdot 4}{52} = \frac{120}{52} \approx 2{,}308$. $\mu = \frac{40}{52} \approx 0{,}769$. $Var \approx 2{,}308 - 0{,}592 = 1{,}716$, $\sigma \approx 1{,}31$

6.36
Ellers nuller positive og negative avvik hverandre ut, og summen $\sum(x - \mu)P$ blir alltid 0.

6.1.4 Fra modell til data

6.37
$\bar{x} = \frac{22}{6} \approx 3{,}67$. Det er litt over $\mu = 3{,}5$, men med seks kast er det ikke rart.

6.38
Modell: μ, σ, p. Data: $\bar{x}$, s, $\hat{p}$.

6.39
Kastene er tilfeldige, så gjennomsnittet varierer fra utvalg til utvalg. Bare forventningsverdien μ er fast.

6.40
Gjennomsnitt av 10 kast. Med flere kast kommer gjennomsnittet nærmere μ (store talls lov), så det varierer mindre.

6.41
$\hat{p} = 0{,}52$, mens $p = 0{,}5$ for en rettferdig mynt.

6.42
14 kr per spill. Ikke overraskende: Standardavviket for ett spill er 30 kr, så gjennomsnittet av 100 spill kan godt avvike 2 kr fra 16.

6.43
2.0

6.44
I en modell er sannsynlighetene vektene, så vi deler ikke på noe. Fra data anslår vi σ, og med $n - 1$ treffer s^2 i gjennomsnitt σ^2.

6.45
Ja. Modellen gir $\mu = 3{,}5$ og $\sigma \approx 1{,}71$.

6.46
Når avviket mellom data og modell er stort sammenliknet med den vanlige tilfeldige variasjonen, for eksempel når et gjennomsnitt av mange observasjoner ligger langt fra μ.

6.2.1 Binomiske forsøk

6.47
a) Ja, $B(12; 0{,}5)$ b) Nei, n er ikke bestemt c) Ja, $B(8; 0{,}2)$ d) Nei, trekkene er avhengige i en liten klasse.

6.48
n er bestemt på forhånd, to utfall i hvert delforsøk, samme p i alle, og delforsøkene er uavhengige.

6.49
$3 \cdot 0{,}5^3 = \frac{3}{8}$

6.50
$P(X = 0) = 0{,}8^3 = 0{,}512$ og $P(X = 3) = 0{,}2^3 = 0{,}008$

6.51
SSFF, SFSF, SFFS, FSSF, FSFS, FFSS: 6 veier.

6.52
$P(X = 0), \ldots, P(X = 4)$ er $\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$.

6.53
$4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$

6.54
4. Tre utfall med to enere og ett med tre.

6.55
Uten tilbakelegging endres sannsynligheten for ess fra trekk til trekk, så trekkene er avhengige. Med tilbakelegging (og stokking) blir det binomisk, $B(3, \frac{1}{13})$.

6.56
$1, 5, 10, 10, 5, 1$

6.57
$10 \cdot 0{,}5^5 = \frac{10}{32} \approx 0{,}313$

6.58
Nei. «Suksess» er bare navnet på det vi teller, uansett om det er ønsket eller ikke.

6.2.2 Binomisk sannsynlighet

6.59
a) 0,3770 b) $0{,}6230 - 0{,}3770 = 0{,}2460$ c) $1 - 0{,}9453 = 0{,}0547$ d) $0{,}9453 - 0{,}0547 = 0{,}8906$

6.60
a) 0,1216 b) $1 - 0{,}6769 = 0{,}3231$ c) $P(X \leqslant 1) = 0{,}3917$

6.61
0,6098, $1 - 0{,}6098 = 0{,}3902$ og $0{,}6098 - 0{,}4032 = 0{,}2066$

6.62
$X \sim B(12; 0{,}25)$. a) $1 - P(X \leqslant 5) = 1 - 0{,}9456 = 0{,}0544$ b) 0,3907

6.63
Antall fiaskoer $Y \sim B(8; 0{,}35)$. $P(X \geqslant 6) = P(Y \leqslant 2) = 0{,}4278$

6.64
$X \sim B(20; 0{,}05)$. a) 0,3585 b) $1 - 0{,}7358 = 0{,}2642$

6.65
$1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}2059 = 0{,}7941$

6.66
Komplementet til $X > 4$ er $X \leqslant 4$. Riktig: $P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4)$.

6.67
10 og 0.3125

6.68
$P(X \leqslant 3)$ for $X \sim B(10; 0{,}5)$, altså 0,1719.

6.69
$\binom{5}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 10 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 0{,}2048$

6.70
$P(X \geqslant 8) = 1 - 0{,}9453 = 0{,}0547$ og $P(X \geqslant 9) = 1 - 0{,}9893 = 0{,}0107$. Svar: 9.

6.2.3 Forventning og spredning i binomisk fordeling

6.71
$\mu = 10$ og $\sigma = \sqrt{8} \approx 2{,}83$

6.72
$\mu = 200$, $\sigma = \sqrt{100} = 10$, intervallet er 180 til 220.

6.73
$\mu = 10$ og $\sigma \approx 2{,}89$, så intervallet er omtrent 4,2 til 15,8. 18 er uvanlig.

6.74
$\mu \approx 519{,}7$ og $\sigma \approx 15{,}9$. 522 ligger godt innenfor $\mu \pm 2\sigma$. Ikke uvanlig.

6.75
Ved gjetting: $\mu = 10$ og $\sigma = \sqrt{7{,}5} \approx 2{,}74$. Intervallet er omtrent 4,5 til 15,5. 17 er uvanlig mye ved gjetting, så eleven har trolig kunnet noe.

6.76
$p = 0{,}5$, der $p(1 - p) = 0{,}25$ er størst. Da er hvert delforsøk mest usikkert.

6.77
$\sigma = \sqrt{9} = 3$

6.78
μ blir fire ganger så stor, og σ blir dobbelt så stor (fordi $\sqrt{4} = 2$).

6.79
200.0 10.0

6.80
$\mu = 207$ og $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}207 \cdot 0{,}793} \approx 12{,}8$

6.81
Ja. Intervallet er omtrent 181 til 233. Kanskje er utvalget ikke representativt, eller andelen røykere har økt.

6.82
Nei. Slike resultater skjer i omtrent 5 % av tilfellene selv om modellen stemmer. Det er en grunn til mistanke, ikke et bevis.