Estimering

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer en oppsummering av hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst. Bruk $z = 1{,}96$ for 95 % der ikke annet står.

Formelark

ESTIMATER OG STANDARDFEIL

Punktestimater $\hat{p}$ for p, $\bar{x}$ for μ, s for σ

Standardfeil for andel

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Standardfeil for gjennomsnitt

$$\frac{s}{\sqrt{n}}$$

KONFIDENSINTERVALLER

For andel

$$\hat{p} \pm z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

For gjennomsnitt

$$\bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Konfidensnivå og z 90 %: 1,645. 95 %: 1,96. 99 %: 2,576.

Feilmargin

$$m \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Utvalgsstørrelse

$$n = \left(\frac{z}{m}\right)^2 \cdot p(1-p)$$

- «95 %» gjelder metoden: 95 % av intervallene inneholder parameteren.
- Feilmarginen fanger bare opp tilfeldig variasjon.

9.1.1 Punktestimater

EKSEMPEL *Røyking blant unge*

Av 651 unge mellom 16 og 24 år i SSBs undersøkelse i 2026 røykte 133 daglig eller av og til. Finn punktestimatet og standardfeilen for andelen røykere blant alle unge.

Kilde: SSB, tabell 05307. Antallet er regnet ut fra prosentene.

Løsning

$\hat{p} = \frac{133}{651} \approx 0{,}204$ og

$$\mathrm{SE}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{0{,}204 \cdot 0{,}796}{651}} \approx 0{,}0158$$

Estimatet er 20,4 %, og det bommer typisk med omtrent 1,6 prosentpoeng. ∎

EKSEMPEL *Gjennomsnittsalder*

Vi trakk 100 tilfeldige personer fra befolkningen i Norge og fikk $\bar{x} = 37{,}5$ år og $s = 24{,}4$ år. Finn punktestimatene for μ og σ, og standardfeilen til $\bar{x}$.

Løsning

Punktestimatene er $\bar{x} = 37{,}5$ år for μ og $s = 24{,}4$ år for σ. Standardfeilen er $\frac{24{,}4}{\sqrt{100}} = 2{,}44$ år.

Den virkelige gjennomsnittsalderen er 41,3 år, så dette utvalget bommet med 3,8 år, omtrent 1,6 standardfeil. Det er ikke uvanlig. ∎

9.1 225 av 500 spurte sier at de leser bøker på fritiden. Finn punktestimatet for andelen.

9.2 Finn standardfeilen i oppgaven over.

9.3 36 målinger har $\bar{x} = 50$ og $s = 12$. Finn standardfeilen.

9.4 Hvilket punktestimat bruker vi for μ, σ og p?

9.5 Hva betyr det at et estimat er forventningsrett?

9.6 Forklar forskjellen på s og standardfeilen $\frac{s}{\sqrt{n}}$.

9.7 Hva skjer med standardfeilen når utvalget blir 9 ganger så stort?

9.8 200 av 1000 spurte svarer ja. Finn $\hat{p}$ og standardfeilen.

9.9 Hva blir utskriften?

Python

```
data = [1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0]
phat = sum(data) / len(data)
print(phat)
```

9.10 Hvorfor deler vi på $n - 1$ når vi regner ut s?

9.1.2 Konfidensintervall for andel

EKSEMPEL *Røyking blant unge*

Av 651 unge røykte 133. Lag et 95 % konfidensintervall for andelen røykere blant alle unge, og tolk det.

Løsning

Forutsetninger: 133 røykere og 518 ikke-røykere, begge over 10. SSB trekker utvalget tilfeldig.

$0{,}204 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}0158 = 0{,}204 \pm 0{,}031$, altså fra 0,173 til 0,235.

Vi er 95 % sikre på at mellom 17,3 % og 23,5 % av alle unge mellom 16 og 24 år røykte daglig eller av og til i 2026. ∎

EKSEMPEL *Ulike nivåer*

Lag et 90 % og et 99 % konfidensintervall for andelen røykere. Hvilket er bredest, og hvorfor?

Løsning

90 %: $0{,}204 \pm 1{,}645 \cdot 0{,}0158 = 0{,}204 \pm 0{,}026$, fra 0,178 til 0,230. 99 %: $0{,}204 \pm 2{,}576 \cdot 0{,}0158 = 0{,}204 \pm 0{,}041$, fra 0,163 til 0,245.

99 %-intervallet er bredest. Skal vi være sikrere på å treffe, må vi gi et bredere intervall. ∎

9.11 Lag et 95 % konfidensintervall for andelen i oppgaven om lesing (225 av 500).

9.12 200 av 1000 svarer ja. Lag et 95 % konfidensintervall.

9.13 150 av 250 svarer ja. Lag et 90 % og et 99 % konfidensintervall.

9.14 Hvilken z brukes for 90 %, 95 % og 99 %?

9.15 Hvilke forutsetninger må være oppfylt for konfidensintervallet for en andel?

9.16 Et 95 % konfidensintervall er $[0{,}31; 0{,}39]$. Tolk intervallet.

9.17 Siri sier at det er 95 % sannsynlighet for at p ligger i intervallet $[0{,}31; 0{,}39]$. Hva er feil?

9.18 Kan du lage et konfidensintervall for en andel når 3 av 50 svarer ja? Begrunn.

9.19 Hva blir utskriften?

Python

```
phat = 0.2
n = 1000
se = (phat * (1 - phat) / n)**0.5
print(round(phat + 1.96 * se, 3))
```

9.20 To 95 % konfidensintervaller er $[0{,}11; 0{,}19]$ og $[0{,}21; 0{,}31]$. Hva tyder det på?

9.21 Hvorfor er et 99 % konfidensintervall bredere enn et 95 %?

9.1.3 Konfidensintervall for gjennomsnitt

EKSEMPEL *Søvn*

$n = 120$, $\bar{x} = 7{,}1$ timer og $s = 1{,}2$ timer. Lag et 95 % konfidensintervall for gjennomsnittlig søvn blant alle elevene på skolen, og tolk det.

Løsning

$\text{SE} = \dfrac{1{,}2}{\sqrt{120}} \approx 0{,}110$, og $1{,}96 \cdot 0{,}110 \approx 0{,}215$.

Intervallet er $7{,}1 \pm 0{,}215$, fra 6,89 til 7,31 timer.

Vi er 95 % sikre på at gjennomsnittlig søvn blant alle elevene på skolen natt til tirsdag var mellom 6,9 og 7,3 timer. Merk at intervallet gjelder **gjennomsnittet**, ikke den enkelte elev. Mange elever sov mye mindre eller mer. ■

EKSEMPEL *Gjennomsnittsalder i Norge*

Et tilfeldig utvalg på 100 personer ga $\bar{x} = 37{,}5$ år og $s = 24{,}4$ år (9.1.1). Lag et 95 % konfidensintervall for gjennomsnittsalderen i Norge. Den virkelige verdien er 41,3 år. Traff intervallet?

Løsning

$37{,}5 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}44 = 37{,}5 \pm 4{,}8$, fra 32,7 til 42,3 år.

Intervallet inneholder 41,3, så det traff.

Aldersfordelingen er ikke normal, men med $n = 100$ er gjennomsnittet omtrent normalfordelt (8.1.3). ■

EKSEMPEL *Hvor mange må spørres?*

Elevrådet vil ha en feilmargin på høyst 0,1 time med 95 % konfidensnivå. Hvor mange elever må de spørre? Bruk $s = 1{,}2$.

Løsning

$\sqrt{n} \geqslant \dfrac{1{,}96 \cdot 1{,}2}{0{,}1} = 23{,}52$, så $n \geqslant 23{,}52^2 \approx 553{,}2$. De må spørre minst 554 elever, hvis skolen har så mange. ■

9.22 36 målinger har $\bar{x} = 50$ og $s = 12$. Lag et 95 % konfidensintervall for μ.

9.23 100 elever brukte i gjennomsnitt 25,5 minutter på skoleveien, med $s = 3{,}2$. Lag et 95 % konfidensintervall.

9.24 225 batterier varte i gjennomsnitt 120 timer, med $s = 15$. Lag et 99 % konfidensintervall.

9.25 Hvorfor krever metoden at $n \geqslant 30$?

9.26 Konfidensintervallet for gjennomsnittlig søvn er $[6{,}9; 7{,}3]$ timer. Ola sier at nesten alle elevene sover mellom 6,9 og 7,3 timer. Hva er feil?

9.27 Hvor mange må måles for at feilmarginen skal bli høyst 2 når $s = 15$ og konfidensnivået er 95 %?

9.28 Hva skjer med bredden av intervallet hvis s dobles?

9.29 Hva blir utskriften?

Python

```
xbar = 50
s = 12
n = 36
m = 1.96 * s / n**0.5
print(xbar - m, xbar + m)
```

9.30 Kan vi bruke konfidensintervallet for gjennomsnittet når dataene er skjeve? Begrunn.

9.1.4 Meningsmålinger og feilmargin

EKSEMPEL *Store og små partier*

En meningsmåling med 1000 spurte gir et stort parti 25 % og et lite parti 4 %. Finn feilmarginen for hvert av dem.

Løsning

Stort parti: $1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{1000}} \approx 0{,}027$, altså $\pm$ 2,7 prosentpoeng. Lite parti: $1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}04 \cdot 0{,}96}{1000}} \approx 0{,}012$, altså $\pm$ 1,2 prosentpoeng.

For det lille partiet er feilmarginen mindre i prosentpoeng, men stor i forhold til oppslutningen: Partiet kan ligge alt fra 2,8 % til 5,2 %. Det avgjør om partiet er over sperregrensen på 4 %. ■

EKSEMPEL *Feilmargin på 2 prosentpoeng*

Hvor mange må spørres for at feilmarginen skal bli høyst 2 prosentpoeng med 95 % konfidensnivå?

Løsning

$n = \left(\dfrac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 \cdot 0{,}25 = 98^2 \cdot 0{,}25 = 2401$.

For å gå fra ± 3 til ± 2 prosentpoeng må byrået spørre mer enn dobbelt så mange. Det er dyrt, og derfor spør de fleste byråer rundt 1000. ■

EKSEMPEL *Har Ap falt?*

Ap går fra 27 % til 25 % i to målinger med 1000 spurte hver. Kan endringen skyldes tilfeldigheter?

Løsning

$\text{SE} \approx \sqrt{\dfrac{0{,}26 \cdot 0{,}74}{1000}} \approx 0{,}0139$ for én måling. For forskjellen: $\sqrt{2} \cdot 0{,}0139 \approx 0{,}0196$. Feilmarginen for endringen er $1{,}96 \cdot 0{,}0196 \approx 0{,}038$, altså 3,8 prosentpoeng.

En endring på 2 prosentpoeng er godt innenfor. Avisen kan ikke konkludere med at Ap har falt. Først hvis mange målinger fra ulike byråer viser samme retning, er det grunn til å tro på en endring. ∎

9.31 Finn den største feilmarginen (tommelfingerregelen) for $n = 625$.

9.32 Et parti får 8 % i en måling med 600 spurte. Finn feilmarginen.

9.33 Hvor mange må spørres for en feilmargin på 3 prosentpoeng når p er ukjent?

9.34 Hvor mange må spørres for en feilmargin på 5 prosentpoeng?

9.35 Et parti går fra 30 % til 33 % i to målinger med 900 spurte hver. Kan endringen skyldes tilfeldigheter?

9.36 Hvilke feil fanger feilmarginen ikke opp? Nevn tre.

9.37 En avis skriver: «Partiet økte fra 4 % til 5 %, en økning på 1 %.» Hva er feil?

9.38 Hva blir utskriften?

Python

```
for n in [625, 2500]:
    print(n, 100 / n**0.5)
```

9.39 Hvorfor spør de fleste byråer rundt 1000 personer, og ikke 10 000?

Fasit

9.1.1 Punktestimater

9.1
$\frac{225}{500} = 0{,}45$

9.2
$\sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{500}} \approx 0{,}0222$

9.3
$\frac{12}{6} = 2$

9.4
$\bar{x}$, s og $\hat{p}$

9.5
At det treffer parameteren i gjennomsnitt over mange utvalg, for eksempel $E(\bar{X}) = \mu$.

9.6
s beskriver hvor mye enkeltobservasjonene varierer. Standardfeilen beskriver hvor mye gjennomsnittet varierer fra utvalg til utvalg.

9.7
Den blir en tredel, fordi $\sqrt{9} = 3$.

9.8
0,2 og $\sqrt{\frac{0{,}16}{1000}} \approx 0{,}0126$

9.9
`0.625`

9.10
Avvikene måles fra $\bar{x}$, ikke fra μ, og blir da litt for små. Med $n - 1$ blir s^2 forventningsrett for σ^2.

9.1.2 Konfidensintervall for andel

9.11
$0{,}45 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}0222 = 0{,}45 \pm 0{,}044$, fra 0,406 til 0,494.

9.12
$0{,}2 \pm 0{,}025$, fra 0,175 til 0,225.

9.13
$\hat{p} = 0{,}6$, SE $\approx 0{,}031$. 90 %: $0{,}6 \pm 0{,}051$, fra 0,549 til 0,651. 99 %: $0{,}6 \pm 0{,}080$, fra 0,520 til 0,680.

9.14
1,645, 1,96 og 2,576

9.15
Tilfeldig utvalg, og minst 10 suksesser og 10 fiaskoer i utvalget.

9.16
Vi er 95 % sikre på at andelen i populasjonen er mellom 31 % og 39 %. Metoden gir intervaller som inneholder den virkelige andelen i 95 % av utvalgene.

9.17
p er et fast tall, så det ligger enten i intervallet eller ikke. «95 %» gjelder metoden: 95 % av intervallene inneholder p.

9.18
Nei, ikke med denne metoden. Det er bare 3 suksesser, under 10, så utvalgsfordelingen er ikke normal.

9.19
`0.225`

9.20
Intervallene overlapper ikke, så det tyder på at de to andelene virkelig er forskjellige.

9.21
For å treffe parameteren oftere må intervallet være bredere. z er større (2,576 mot 1,96).

9.1.3 Konfidensintervall for gjennomsnitt

9.22
$50 \pm 1{,}96 \cdot 2$, fra 46,08 til 53,92.

9.23
SE $= 0{,}32$, $25{,}5 \pm 0{,}63$, fra 24,87 til 26,13 minutter.

9.24
SE $= 1$, $120 \pm 2{,}576$, fra 117,4 til 122,6 timer.

9.25
Da er gjennomsnittet omtrent normalfordelt (sentralgrensesetningen), og s er et godt nok estimat for σ.

9.26
Intervallet gjelder gjennomsnittet, ikke de enkelte elevene. Mange elever sover mye mindre eller mer.

9.27
$n \geqslant \left(\frac{1{,}96 \cdot 15}{2}\right)^2 \approx 216{,}1$, altså 217.

9.28
Bredden dobles.

9.29
`46.08 53.92`

9.30
Ja, når n er stor nok, fordi gjennomsnittet da er omtrent normalfordelt. Er dataene svært skjeve, trengs større n.

9.1.4 Meningsmålinger og feilmargin

9.31
$\frac{1}{25} = 0{,}04$, altså 4 prosentpoeng.

9.32
$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{600}} \approx 0{,}022$, altså $\pm$ 2,2 prosentpoeng.

9.33
$\left(\frac{1{,}96}{0{,}03}\right)^2 \cdot 0{,}25 \approx 1067{,}1$, altså 1068.

9.34
$\left(\frac{1{,}96}{0{,}05}\right)^2 \cdot 0{,}25 \approx 384{,}2$, altså 385.

9.35
SE $\approx 0{,}0153$ per måling. For forskjellen: $1{,}96 \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}0153 \approx 0{,}042$. En endring på 3 prosentpoeng er innenfor, så den kan skyldes tilfeldigheter.

9.36
Skjevt utvalg (for eksempel selvseleksjon), frafall (de som ikke svarer, er annerledes) og ledende eller uklare spørsmål.

9.37
Økningen er 1 prosentpoeng, men 25 % i forhold til utgangspunktet.

9.38
`625 4.0` og `2500 2.0`

9.39
Feilmarginen avtar bare med $\sqrt{n}$. Ti ganger så mange gir bare omtrent en tredel så stor feilmargin (± 1 mot ± 3 prosentpoeng), men koster ti ganger så mye.